SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2002-2003

Angelo Favini

EQUAZIONI ASTRATTE COMPLETE DI TIPO ELLITTICO

28 gennaio 2003

Tecnoprint - Bologna 2005

Riassunto Si considera l'equazione differenziale astratta completa del secondo ordine sull'intervallo $[0,1]$

$$u''(t) + 2Bu'(t) + Au(t) = f(t)$$

e si danno condizioni sui coefficienti operatoriali A e B affinché il relativo problema ai limiti $u(0) = u_0, u(1) = u_1$ abbia una unica soluzione stretta per ogni funzione Hölder continua f.
I risultati vengono applicati ad alcune equazioni alle derivate parziali.

Abstract We consider the abstract complete differential equation of the second order on the interval $[0,1]$

$$u''(t) + 2Bu'(t) + Au(t) = f(t)$$

and we give some conditions on the involved operator-coefficients A and B so that the related boundary-value problem $u(0) = u_0, u(1) = u_1$ have a unique strict solution for every Hölder continuous function f.
The results are illustrated with the help of some partial differential equations.

1 Introduzione

In questo seminario viene considerata l'equazione differenziale astratta del secondo ordine

$$u''(t) + 2Bu'(t) + Au(t) = f(t), 0 \leq t \leq 1, \tag{1}$$

e si richiede che la soluzione $u(t)$ soddisfi le condizioni ai limiti

$$u(0) = u_0, u(1) = u_1. \tag{2}$$

La funzione f é una funzione continua da $[0,1]$ allo spazio di Banach X, munito della norma $\|\cdot\|$, A e B sono due operatori lineari chiusi in X con dominio $D(A)$ e $D(B)$, rispettivamente, e u_0, u_1 sono fissati elementi del dominio di A.
Si cerca una soluzione *stretta* $u(t)$ del problema (1), (2), cioé una funzione $u \in C^2([0,1];X)$ tale che $u \in C([0.1];D(A))$, $u' \in C([0,1];D(B))$ e (1), (2) sono soddisfatte.
Ovviamente, se Y é uno spazio di Banach e k é un intero non negativo, $C^k([0,1];Y)$ denota lo spazio delle funzioni k volte differenziabili con continuitá da $[0,1]$ in Y e, per semplicitá, si pone $C^0([0,1];Y) = C([0,1];Y)$. Inoltre, il dominio di un operatore chiuso K in X viene munito della norma del grafico $\|u\|_{D(K)} = \|u\| + \|Ku\|, u \in D(K)$, con cui diventa uno spazio di Banach.
Il problema (1), (2), con $B = 0$, é ampiamente considerato nella letteratura matematica. Basti considerare i lavori di S.G.Krein, vedi la sua monografia [4], pp. 249-270, P.E.Sobolevskii, G.Da Prato e P.Grisvard, M.Fuhrman.
Problemi ai limiti per equazioni differenziali astratte, dipendenti anche da parametri, sono descritti dettagliatamente nella recente monografia [7] di S.Yakubov e Y.Yakubov. Questi autori cercano peró le soluzioni in spazi L^p a valori vettoriali, $1 < p < \infty$.
Una delle principali motivazioni per trattare il problema (1), (2) viene dal problema ellittico in un rettangolo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f,$$

con dati nulli sulla frontiera. A questo proposito, si rinvia ai fondamentali risultati di P.Grisvard.
Viene naturale chiedersi se il metodo dei semigruppi possa essere adattato per risolvere l'equazione completa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f.$$

La risposta é sí, ma sotto opportune condizioni, connesse sostanzialmente alla commutativitá di certi coefficienti operatoriali. Si noti che un opportuno cambiamento della variabile dipendente u nella equazione ellittica generale porta ad una equazione equivalente per il Laplaciano, purché, appunto, b sia una costante numerica.
Da alcuni anni, R.Labbas ha cominciato, assieme ad alcuni collaboratori, uno studio sistematico dell'equazione (1), utilizzando il metodo della somma di operatori.
Mi limito a citare il recente lavoro [1], dove la soluzione $u(t)$ viene descritta esplicitamente mediante calcolo operatoriale.
In questo seminario esporró un approccio diretto al problema (1), (2), che estende a $B \neq 0$ quello di S.G.Krein [4], sotto ipotesi sugli operatori vicine a quelle di A.El Haial e R.Labbas [1].
Come vedremo, l'assunzione essenziale (che condiziona notevolmente l'applicazione ad equazioni alle derivate parziali su domini limitati) é che B generi un gruppo fortemente continuo di operatori in X e ció non consente, per esempio, di trattare un'equazione come

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad (t,x) \in (0,1) \times (0,1).$$

Un prossimo obiettivo sará appunto di togliere questa restrizione.
I risultati che esporró fanno parte di un lavoro in collaborazione con R.Labbas, H.Tanabe e A.Yagi.

2 I risultati principali

Quí di seguito elenco le assunzioni relative al problema (1), (2).

Assunzione 1 *$D(A) \subseteq D(B)$, $B^2 - A$ é un operatore (lineare) chiuso e*

$$\|(sI + B^2 - A)^{-1}\|_{L(X)} \leq C(1+s)^{-1}, \quad s \geq 0. \tag{3}$$

La (3) implica che $(B^2 - A)^{1/2}$ genera un semigruppo analitico nello spazio X.

Assunzione 2 *Gli operatori B e $B^2 - A$ commutano nel senso risolvente.*

Assunzione 3 *L'operatore B genera un gruppo fortemente continuo in X e*

$$B(B^2 - A)^{-1/2} \in L(X). \tag{4}$$

L'ipotesi 2 e la (4) implicano che

$$B^2(B^2-A)^{-1} \in L(X), \quad A(B^2-A)^{-1} \in L(X).$$

L'ultima richiesta che facciamo é la seguente.

Assunzione 4 *Gli operatori A e $B+(B^2-A)^{1/2}$ hanno inversi limitati.*

Denoteremo con $C^\theta([0,1];X), 0<\theta<1$, lo spazio delle funzioni hölderiane di esponente θ, da $[0,1]$ in X.
Vale allora il teorema seguente.

Teorema 1 *Sotto le ipotesi 1-4, per ogni $f \in C^\theta([0,1];X), 0<\theta<1$, e ogni $u_0, u_1 \in D(A)$, il problema (1), (2) ha una unica soluzione stretta.*

Per la dimostrazione del teorema abbiamo bisogno di alcuni lemmi.

Lemma 1 *Se valgono le ipotesi 1-4, allora anche l'operatore $B-(B^2-A)^{1/2}$ ha inverso limitato e*

$$(B-(B^2-A)^{1/2})^{-1} = (B+(B^2-A)^{1/2})A^{-1},$$
$$(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1} = (B-(B^2-A)^{1/2})A^{-1}.$$

Dimostrazione. L'ipotesi 2 assicura che per ogni $y \in D(A)$ si ha

$$B(B^2-A)^{-1/2}y = (B^2-A)^{-1/2}By,$$

cioé,

$$(B^2-A)^{1/2}B(B^2-A)^{-1/2}y = By.$$

Ció implica che per ogni $x \in X$

$$(B^2-A)^{1/2}BA^{-1}x = (B^2-A)^{1/2}B(B^2-A)^{-1/2}(B^2-A)^{1/2}A^{-1}x$$
$$= B(B^2-A)^{1/2}A^{-1}x.$$

Pertanto,

$$(B-(B^2-A)^{1/2})(B+(B^2-A)^{1/2})A^{-1}$$
$$= B^2A^{-1} - (B^2-A)^{1/2})BA^{-1} + B(B^2-A)^{1/2})A^{-1} - (B^2-A)A^{-1}$$
$$= I.$$

Resta allora da mostrare che $B-(B^2-A)^{1/2}$ é invertibile.
Sia dunque

$$(B-(B^2-A)^{1/2})x=0.$$

Allora

$$\begin{aligned}
0 &= (B-(B^2-A)^{1/2})(B+(B^2-A)^{1/2})A^{-1}A(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}x \\
&= A(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}x \\
&= A(B+(B^2-A)^{1/2})^{-2}(B+(B^2-A)^{1/2})x \\
&= A(B^2-A)^{-1}(B^2-A)^{1/2}(B^2-A)^{1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-2}(B+(B^2-A)^{1/2})x.
\end{aligned}$$

D'altra parte, si vede che sotto le nostre ipotesi,

$$(B^2-A)^{1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-2}=(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(B^2-A)^{1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}.$$

Segue che

$$\begin{aligned}
0 &= (B-(B^2-A)^{1/2})x \\
&= A(B^2-A)^{-1}((B^2-A)^{1/2}(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1})^2(B+(B^2-A)^{1/2})x,
\end{aligned}$$

Se ne deduce che $x=0$, come desiderato.

Denotiamo con $V(t)$ il semigruppo analitico generato da $-(B^2-A)^{1/2}$.
Vale allora il lemma seguente.

Lemma 2 *Se A e $B+(B^2-A)^{1/2}$ hanno inversi limitati, allora per ogni $x \in X$*

$$\int_0^t e^{-sB}V(s)xds=(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(I-e^{-tB}V(t))x,$$
$$\int_0^t e^{sB}V(s)xds=(-B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}(I-e^{tB}V(t))x.$$

Dal Lemma precedente segue chiaramente che

$$\int_0^t e^{sB}V(s)xds=(B+(B^2-A)^{1/2})^{-1}A^{-1}(e^{tB}V(t)-I)x.$$

Per la dimostrazione del lemma, si osserva prima che per ogni $x \in D((B^2-A)^{1/2})$

$$(B^2-A)^{1/2}\int_0^t e^{-sB}V(s)xds=x-e^{-tB}V(t)x-B\int_0^t e^{-sB}V(s)xds.$$

Sfruttando la densitá di $D((B^2 - A)^{1/2})$ in X, tale formula viene estesa a ogni $x \in X$ e ció prova il nostro asserto.

Lemma 3 *Sotto le ipotesi 1-4, gli operatori*

$$\pm B - (B^2 - A)^{1/2}$$

generano semigruppi analitici in X

Il Lemma 3 fornisce un risultato nuovo e di interesse indipendente.

Dimostrazione. Le assunzioni fatte assicurano che $\pm B - (B^2 - A)^{1/2}$ sono operatori chiusi. Inoltre, in virtú della commutativitá di B e $(B^2 - A)^{1/2}$, $T(t) = e^{tB}V(t)$ é un semigruppo fortemente continuo di operatori in X. Si vede che il suo generatore infinitesimale é proprio $B - (B^2 - A)^{1/2}$. Discorso analogo per $e^{-tB}V(t)$.
Sia

$$S(t) := V(t)e^{\pm tB} = e^{t(\pm B - (B^2 - A)^{1/2}} = e^{\pm tB}V(t).$$

Mostriamo che $S(t)$ é differenziabile in $(0, \infty)$.
Infatti, per ogni $x \in X$ e $t > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}(e^{\pm tB}(B^2 - A)^{-1/2}(B^2 - A)^{1/2}V(t)x) \\ &= \pm e^{\pm tB}B(B^2 - A)^{-1/2}(B^2 - A)^{1/2}V(t)x \mp e^{\pm tB}(B^2 - A)^{1/2}V(t)x. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$(B \pm (B^2 - A)^{1/2})S(t) = (B \pm (B^2 - A)^{1/2})(B^2 - A)^{-1/2}(B^2 - A)^{1/2}V(t)e^{\pm tB}$$

implica la stima

$$\|(B \pm (B^2 - A)^{1/2})S(t)\|_{L(X)} \leq C/t, \quad t > 0.$$

Ció é sufficiente, in forza di un ben noto teorema di generazione, cfr. Pazy [6], pp. 61-62, a provare la nostra affermazione.

Dimostrazione del Teorema. Sia $f \in C^\theta([0,1]; X)$, $0 < \theta < 1$. Il primo passo consiste nel costruire una soluzione particolare dell'equazione (1). Posto

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) = &-\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)B}V(t-s)(B^2 - A)^{-1/2}f(s)ds \\ &- \frac{1}{2}\int_t^1 e^{-(t-s)B}V(s-t)(B^2 - A)^{-1/2}f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

si mostra che $\bar{u}(t)$ risolve l'equazione (1).
I primi due lemmi vengono usati per mostrare che $\bar{u}(t) \in C([0,1]; D(A))$, esiste $\frac{d\bar{u}(t)}{dt}$ e $\frac{d\bar{u}(t)}{dt} \in C([0,1]; D(B))$.
Il Lemma 3 é essenziale per derivare sotto i segni di integrale e che $\bar{u}(t) \in C^2([0,1]; X)$. Dunque, $\bar{u}(t)$ soddisfa (1) e

$$\bar{u}(0) = -\frac{1}{2}\int_0^t U_1(s)(B^2 - A)^{-1/2} f(s)ds,$$
$$\bar{u}(1) = -\frac{1}{2}\int_0^1 U_2(1-s)(B^2 - A)^{-1/2} f(s)ds,$$

dove

$$U_1(t) = e^{t(B-(B^2-A)^{1/2})}, \quad t \geq 0,$$
$$U_2(t) = e^{-t(B+(B^2-A)^{1/2})}, \quad t \geq 0.$$

Si riconosce poi che $\bar{u}(0)$ e $\bar{u}(1)$ appartengono a $D(A)$. D'altra parte, vale il seguente lemma.

Lemma 4 *Sotto le ipotesi 1-4, se*

$$x_0, x_1 \in D(A),$$

allora il problema omogeneo

$$u''(t) + 2Bu'(t) + Au(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{5}$$
$$u(0) = x_0, u(1) = x_1, \tag{6}$$

ha una unica soluzione stretta $\tilde{u}(t)$.

La soluzione $\tilde{u}(t)$ del problema (5), (6) é data da

$$\tilde{u}(t) = U_2(t)\xi_0 + U_1(1-t)\xi_1,$$

dove

$$\xi_0 = (I - V(2))^1(x_0 - U_1(1)x_1),$$
$$\xi_1 = (I - V(2))^1(x_1 - U_2(1)x_0).$$

Si noti che $1 \in \rho(V(2))$ in forza di note proprietá dei semigruppi analitici. Vedi, per esempio, Lunardi [5], p. 59.

La dimostrazione del teorema viene completata osservando che se $\bar{\bar{u}}(t)$ é la soluzione stretta del problema (5),(6) con

$$x_0 = u_0 - \bar{u}(0), \quad x_1 = u_1 - \bar{u}(1),$$

allora

$$u(t) = \bar{u}(t) + \bar{\bar{u}}(t)$$

é l'unica soluzione stretta del problema (1), (2).

Osservazione. L'ipotesi che $B^2 - A$ abbia inverso limitato é veramente essenziale per poterci limitare ad assumere $f(t)$ solamente h ölderiana. Per esempio, se X é uno spazio di Hilbert complesso, $B = iK$, $A = -K^2$, dove K é un operatore auto-aggiunto in X, e $f \in C([0,1]; X)$, allora la soluzione $u(t)$ di (1), (2), soddisfacente $u(0) = 0 = u(1)$, é necessariamente

$$u(t) = te^{-itK} \int_0^1 (s-1)e^{isK} f(s)ds + \int_0^t (t-s)e^{i(s-t)K} f(s)ds,$$

ma $f(t)$ deve essere piú regolare per concludere che $u(t)$ sia soluzione stretta di (1), (2).

3 Esempi ed applicazioni

In questo sezione verranno considerate alcune equazioni alle derivate parziali che possono essere trattate per mezzo del risultato astratto ottenuto precedentemente.

Esempio 1. Sia $X = L^2(R)$, munito del prodotto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_R f(x)\bar{g}(x)dx, \quad f, g \in X,$$

e siano A, B gli operatori lineari da X in sé definiti da

$$D(A) = H^4(R), \quad Au = a\frac{d^4u}{dx^4} - cu, \quad u \in D(A),$$
$$D(B) = H^2(R), \quad Bu = ib\frac{d^2u}{dx^2}, \quad u \in D(B),$$

con

$$a + b^2 < 0, \quad b \neq 0, \quad c > 0.$$

Applicando la disuguaglianza di Heinz, si vede che tutte le condizioni 1-4 sono soddisfatte.
Pertanto, il Teorema 1 si applica al problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + 2ib\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}(x,t) + a\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) - cu = f(x,t), \quad 0 < t < 1, \quad x \in R,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad u(x,1) = u_1(x), \quad x \in R,$$

purché la funzione $f(t)(x) = f(x,t)$ risulti hölderiana nel tempo a valori in $L^2(R)$ e u_0, u_1 appartengano a $H^4(R)$.

Esempio 2. Prendiamo $X = L(R^n)$, $n > 1$, e introduciamo gli operatori A e B mediante

$$D(A) = H^4(R^n), \quad Au = a\Delta^2 u - cu, \quad u \in D(A),$$
$$D(B) = H^2(R^n), \quad Bu = ib\Delta u, \quad u \in D(B),$$

dove

$$a + b^2 < 0, \quad b \neq 0, \quad c > 0.$$

Di nuovo, tutte le ipotesi 1-4 sono verificate e si ottiene una estensione dell'esempio precedente a dimensione maggiore di 1.

Esempio 3. Sia $X = L^p(R)$, $1 < p < \infty$, munito della norma

$$\|f\| = (\int_R |f(x)|^p dx)^{1/p}.$$

Introduciamo gli operatori A e B. Precisamente,

$$D(A) = W^{2,p}(R), \quad Au = a\frac{d^2u}{dx^2} + c\frac{du}{dx} - du, \quad u \in D(A),$$
$$D(B) = W^{1,p}(R), \quad Bu = b\frac{du}{dx}, \quad u \in D(B),$$

dove

$$a > b^2 > 0, \quad d > 0, \quad c \in R.$$

É ben noto che B genera un gruppo fortemente continuo di operatori lineari in X e si verifica facilmente che tutte le assunzioni del Teorema 1 sono soddisfatte. L'applicazione alla corrispondente equazione alle derivate parziali é ovvia.

Esempio 4. (operatori parabolici degeneri).
In questo esempio utilizzeremo alcuni risultati di Favini e Romanelli [3].
Sia $\alpha(x)$ una funzione continua su $[0,1]$, tale che

$$\alpha(x) > 0 \text{ per ogni } x \in (0,1), \quad \alpha(0) = 0 = \alpha(1),$$
$$\sqrt{\alpha} \in C^1([0,1]).$$

Introduciamo lo spazio X mediante

$$X = C_0([0,1]) = \{u \in C([0,1]); u(0) = 0 = u(1)\},$$

munito della norma del massimo $\|u\|_\infty$.
L'operatore B é definito da

$$\begin{aligned} D(B) &= \{u \in C_0([0,1]) \cap C^1((0,1)); \lim_{x\to 0,1} \sqrt{\alpha(x)}\frac{du(x)}{dx} = 0\}, \\ Bu &= \sqrt{\alpha}\frac{du}{dx} = \sqrt{\alpha}u', \quad u \in D(B). \end{aligned}$$

Allora si prova, mediante un argomento di similaritá, che B genera un gruppo fortemente continuo di operatori lineari in X.
Introduciamo l'operatore A per mezzo di

$$\begin{aligned} &D(A) = \{u \in C_0([0,1]) \cap C^2((0,1)); \lim_{x\to 0,1} \sqrt{\alpha(x)}\frac{du(x)}{dx} = 0 = \lim_{x\to 0,1} \alpha(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2}\}, \\ &Au = aB^2u - cu = a\alpha\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{a}{2}\frac{d\alpha}{dx}\frac{du}{dx} - cu, \quad u \in D(A), \\ &a > 1, c > 0. \end{aligned}$$

In forza delle assunzioni, si vede che tutte le ipotesi (1) – (4) sono verificate.
Possiamo quindi applicare il Teorema 1 al problema

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\sqrt{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a\sqrt{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}) - cu = f, \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < 1, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad u(x,1) = u_1(x), \quad 0 < x < 1, \\ &\lim_{x\to 0,1} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 = \lim_{x\to 0,1} \sqrt{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad 0 < t < 1, \\ &\lim_{x\to 0,1} u = \lim_{x\to 0,1} \sqrt{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{x\to 0,1} \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < t < 1, \end{aligned}$$

purché $f \in C^\theta([0,1]; C_0([0,1]))$, $0 < \theta < 1$, e $u_0, u_1 \in D(A)$.

Osservazioni finali. L'ipotesi che $\pm B - (B^2 - A)^{1/2}$ generi un semigruppo analitico consente di evitare l'assunzione che B generi un gruppo fortemente continuo.
Ció permette, tra l'altro, di trattare operatori differenziali in domini limitati oppure con condizioni al limiti periodiche.
Si possono allora ottenere risultati di regolaritá massimale in t della soluzione, che sembrano sfuggire con il presente approccio.

Bibliografia

[1] A.El Haial, R.Labbas, On the ellipticity and solvability of an abstract second-order differential equation, Electronic Diff.Eqs.57(2001),1-18.

[2] A.Favini, R.Labbas, H.Tanabe, A.Yagi, On the solvability of complete abstract differential equations of elliptic type, in corso di stampa su "Funkc. Ekv.".

[3] A.Favini, S.Romanelli, Analytic semigroups on $C([0,1])$ generated by some classes of second order differential operators, Semigroup Forum 56(1998), 367-372.

[4] S.G.Krein, "Linear Differential Equations in Banach Space", Moscow, 1967; English Translation: AMS, Providence, 1971.

[5] A.Lunardi, "Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems", Birkhäuser, Basel, 1995.

[6] A.Pazy, "Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.

[7] S.Yakubov, Y.Yakubov, "Differential-Operator Equations: Ordinary and Partial Differential Equations", Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, Washington, 2000.